ҒТАМР 14.25.09 https://doi.org/10.26577/JES.2023.v74.i1.012

Н.К. Сейдімбек[1*], С.Е. Касенов[2], А.М. Тлеулесова[2], К.М. Шияпов[3], Ә.И. Ануар[1]

[1]Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Қазақстан, Алматы қ.
[2]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.
[3]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Қазақстан, Алматы қ.
*e-mail: nurzhamal.n2000@gmail.com

МЕКТЕП МАТЕМАТИКА КУРСЫНДА ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ ӘДІСТЕРІН ҚОЛДАНУ

Мақалада мектептегі математика курсындағы тригонометрия бөлімінің бағдарламасы және тригонометрияны өмірде қолдану туралы айтылады. Кіріспеде тригонометриялық теңдеулердің анықтамасы берілген және теңдеу шешімдерінің түрлері ұсынылған. Мысалдарда тригонометриялық теңдеулерді шешу әдістері көрсетілген. Қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шешу жолдары және оларды өз бетінше шешу мүмкіндіктері қарастырылған. Мектептегі математика курсында іс жүзінде аз қолданылатын теңдеулерді шешу әдістері бөлек атап өтілді. Зерттеу нәтижелері бойынша тригонометриялық теңдеулерді шешудің онға жуық әдісі анықталды. Тригонометриялық теңдеулерді шешу әдістерінің мәнін ашу мақсатында әр әдіс үшін есептер қарастырылып, осы есептерді шығару жолдары көрсетілген. Сонымен қатар мақалада білім алушылардың тригонометриялық теңдеулерді шешудегі қиындықтары және осы есептерді шешуде А.Г. Мордкович ұсынған әдістер туралы айтылды. Қорытынды бөлімде мұғалімдердің әдістемелік тәжірибесінің нәтижелері жинақталды, онда білім алушылар «тригонометриялық теңдеулерді шешу әдістері» тақырыбындағы бірқатар есептерді шешуге машықтанды және мұғалімдер оқушылардың теңдеуді шешуге болатын қабілеттерін анықтады. Алдағы уақытта «Тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктер» тақырыбында нақты әдістемелік құрал шығару жоспарлануда.

Түйін сөздер: тригонометриялық теңдеу, әдістеме, теңдеуді шешу, әдістер.

N.K. Seidimbek[1*], S.E. Kasenov[2], A.M. Tleulesova[2], K.M. Shiyapov[3], A.I. Anuar[1]

[1]Kazakh National Women's Pedagogical University, Kazakhstan, Almaty
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty
[3]Abai Kazakh National Pedagogical University, Kazakhstan, Almaty
*e-mail: nurzhamal.n2000@gmail.com

Using methods for solving trigonometric equations in a school mathematics course

The article describes the program of the trigonometry section in the school mathematics course and the application of trigonometry in life. The introduction defines trigonometric equations and mentions the types of solutions to the equation. The examples show methods for solving trigonometric equations. The ways of solving simple trigonometric equations and the possibilities of their independent solution are illustrated. Separately, methods for solving equations were noted, which are actually little used in the school mathematics course. According to the results of the study, about ten types of methods for solving trigonometric equations were identified. In order to reveal the essence of the methods of solving trigonometric equations, the problems for each method are considered and the ways of deducing these problems are shown. In addition, this article discussed the difficulties faced by students in solving trigonometric equations, and the methods proposed by A. G. Mordkovich in solving these problems.

In the final part, the results of the methodological experience of teachers are summarized, when students practiced solving a series of problems on the topic "Methods for solving trigonometric equations" and teachers identified abilities that can be developed in students to solve the equation. In the future, it is planned to publish a specific methodological manual on the topic "Trigonometric equations and inequalities".

Key words: trigonometric equation, methodology, equation solution, methods.

Н.К. Сейдимбек[1*], С.Е. Касенов[2], А.М. Тлеулесова[2],
К.М. Шияпов[3], А.И. Ануар[1]
[1]Казахский национальный женский педагогический университет, Казахстан, г. Алматы
[2]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы
[3]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Казахстан, г. Алматы
*e-mail: nurzhamal.n2000@gmail.com

Использование методов решения тригонометрических уравнений в школьном курсе математики

В статье рассказывается о программе раздела «Тригонометрия» в школьном курсе математики и о применении тригонометрии в жизни. Во введении дается определение тригонометрических уравнений и упоминаются виды решений уравнения. На примерах показаны методы решения тригонометрических уравнений. Проиллюстрированы способы решения простых тригонометрических уравнений и возможности их самостоятельного решения. Отдельно были отмечены методы решения уравнений, которые фактически мало используются в школьном курсе математики. По результатам исследования было выявлено около десяти видов методов решения тригонометрических уравнений. С целью раскрытия сущности методов решения тригонометрических уравнений рассмотрены задачи для каждого метода и показаны пути вывода этих задач. Кроме того, в данной статье речь шла и о трудностях, с которыми сталкиваются учащиеся при решении тригонометрических уравнений, и о методах, предложенных А. Г. Мордковичем в решении этих задач.

В заключительной части обобщены результаты методического опыта учителей, когда обучающиеся практиковались в решении серии задач по теме «Методы решения тригонометрических уравнений» и учителя выявляли способности, которые можно развивать у учащихся для решения уравнения. В дальнейшем планируется издание конкретного методического пособия по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства».

Ключевые слова: тригонометрическое уравнение, методика, решение уравнения, методы.

Кіріспе

Синус, косинус, тангенс – бұл сөздерді жоғары сынып оқушыларының қатысуымен айтқан кезде, оқушылардың шамамен үштен екі бөлігі одан әрі сөйлесуге деген қызығушылығын жоғалту ықтималдығы бар. Себебі, мектептегі тригонометрия негіздері шындықтан толық бөлініп оқытылады, сондықтан оқушылар формулалар мен теоремаларды үйренудің мағынасын көрмейді.

Оқушылардың барлығы мына сұрақтарды қояды: тригонометрия не үшін қажет? Ол біздің әлемде қалай қолданылады? Тригонометриямен не байланысты болуы мүмкін? Бұл сұрақтарға жауаптар қарастырсақ, тригонометрия немесе тригонометриялық функциялар астрономияда (әсіресе аспан нысандарының жағдайын есептеу үшін), акустикада, оптикада, қаржы нарықтарын талдауда, статистикада, биологияда, медициналық бейнелеуде, мысалы, компьютерлік томография және ультрадыбыстық, химияда, сейсмологияда, метеорологияда, океанографияда, архитектурада, экономикада, компьютерлік графикада, кристаллографияда және басқа да көптеген салаларда қолданылады.

Теңдеулер мен теңсіздіктерге байланысты материалдар мектеп курсы математикасының мазмұнының түрлі салаларында және маңызды қолданбалы есептерді шығаруда кең қолданыс табады. Сондықтан да оқушыларды теңдеулер мен теңсіздіктер жүйесінің қолданбалық, теориялық математикалық және математика курсының басқа да мазмұндық байланысын құру бағыттарын игерту, мәселен теңдеулер мен теңсіздіктерді шешуге үйрету материалдарын талдау мен синтездеу деңгейінде сапалы игерту мәселесімен тығыз байланысты. А. Эйнштейн: «Маған біраз уақытымды саясатқа, тағы біразын теңдеулерге бөлуге тура келеді. Алайда, менің ойымша, саясаттан гөрі теңдеулер әлдеқайда маңызды, өйткені саясат тек өз тұсында ғана, ал теңдеулер мәңгі-бақи бола береді» деп тұжырымдаған болатын. (Алпысов, 2012: 11) [1].

Егер бұрын тригонометрия мектепте жеке пән ретінде оқылса, қазір геометрия курсында, содан кейін алгебра курсында және анализ бастамаларында оқытылады. Қолданыстағы бағдарламалар бойынша қазақстандық орта мектепте тригонометрияны зерттеу VIII сыныпта геометрия курсын, атап айтқанда тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатынас бөлімінің өтуіне байланысты басталады. Әдістемелік әдебиеттерде VIII сынып курсында тригонометрия бойынша бағдарламалық материал тригонометрияның бастапқы курсы деп аталады. . Бағдарламада да, орта мектепке арналған геометрия оқулықтарында да VIII сыныптағы тригонометрия «Сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары» тақырыбымен бастау алады. Содан кейін тригонометрия курсы IX-XI сыныптарда жалғасады. IX және XI сыныптарының бағдарламалық материалы тригонометрияның жүйелі курсы деп аталады. IX сыныпта қолданыстағы бағдарлама бойынша кез келген аргументтердің тригонометриялық функциялары және үшбұрыштарды шешу тақырыбы барысында оқытылады. X сыныптың алгебра курсында «Тригонометриялық функциялар, олардың қасиеттері және графиктері» бөлімімен қатар «Тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктер» бөлімі қарастырылады. (Шарыгин Кравцев Мордкович) [2-4].

Орта мектеп математика мұғалімінен сұраңыз, 10-сыныпта тригонометриялық теңдеулерді зерттеудегі басты мәселе неде? Жауап ретінде сіз "оқушылар формулаларды білмейді"дегенді естисіз. Сондықтан мұғалімдер уақыттары мен күштерін оқушыларға формулаларды жаттатқызуға арнайды. Нәтижесінде біз қарапайым қорытындыға келеміз: тригонометриялық теңдеулерді шешу үшін тригонометриялық өрнектерді түрлендіруді білу және қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шешудің негізгі формулаларын жаттау керек.

Бүгінгі таңда математика мұғалімінің негізгі міндеті – баланың ойлау қабілетін дамыту, оның жадын формулалармен толтыру емес (нақты өмірде мектеп формулаларының басым көпшілігі адамдарға қажет емес) екенін түсінген кезде, тригонометриялық әдістемені түсіндіру жолын қайта қараудың уақыты келді. Осыған байланысты А.Г. Мордкович өзінің "жалпы білім беретін мектепте тригонометрияны оқытудың әдістемелік мәселелері" атты мақаласында тригонометрияны зерттеуде басшылыққа алынатын үш негізгі тезисті анықтайды.

1. Бөлімді зерттеудің басында басты назар "координаталық жазықтықтағы сандық шеңбер" моделіне аударылуы керек.
2. Шын мәнінде, мектепте Тригонометриялық теңдеулер іс жүзінде зерттелмейді – оның орнына тригонометриялық түрлендірулермен жұмыс жасайды.
3. Тригонометриялық формулаларды оқушы тригонометрия курсы негізделген екі тезисті игергеннен кейін жасау керек: сандық шеңбер және қарапайым теңдеулер. (Мордкович, 2002: 2) [5].

Зерттеу әдістері

Тригонометриялық теңдеу деп айнымалысы тригонометриялық функцияның аргументі түрінде берілген теңдеуді айтады. Қарапайым тригонометриялық теңдеулер:

$sinx = a, cosx = a, tgx = a, ctgx = a$ (Әбілқасымова, 2019: 148) [6].

1. $sinx = a$

a) $sinx = 0, x = \pi n, n\epsilon Z$

b) $sinx = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$

c) $sinx = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$

d) $sinx = a$, $|a| \leq 1$, $x = (-1)^n arcsina + \pi n, n\epsilon Z$

e) $sinx = -a, |a| \leq 1,$ $x = (-1)^{n+1} arcsin|a| + \pi n, n\epsilon Z$

f) $sinx = a, |a| > 1\ \emptyset$

2. $cosx = a$

a) $cosx = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$

b) $cosx = 1, x = 2\pi n, n\epsilon Z$

c) $cosx = -1, x = \pi + 2\pi n, n\epsilon Z$

d) $cosx = a, \quad |a| \leq 1, \quad x = \pm arccosa + 2\pi n, n\epsilon Z$

e) $cosx = -a, \quad |a| \leq 1, \quad x = \pm(\pi - arccosa) + 2\pi n, n\epsilon Z$

f) $cosx = a, |a| > 1\ \emptyset$

3. $tgx = a$

a) $tgx = 0, x = \pi n, n\epsilon Z$

b) $tgx = a, x = arctga + \pi n, n\epsilon Z$

c) $tgx = -a, x = -arctga + \pi n, n\epsilon Z$

4. $ctgx = a$

a) $ctgx = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$

b) $ctgx = a, x = arcctga + \pi n, n\epsilon Z$

c) $ctgx = -a, \quad x = (\pi - arcctga) + \pi n, n\epsilon Z$

Берілген теңдеуді қанағаттандыратын мәндер жиынтығы теңдеудің шешімдері (немесе түбірлері) деп аталады. Тригонометриялық теңдеудің шексіз шешімдері болуы мүмкін, олар келесідей жіктеледі:

1. Негізгі шешім: "x" айнымалысы бар тригонометриялық теңдеудің шешімдері, олар үшін негізгі шешімдер деп аталады. Мысалы,

$sinx = \frac{1}{2}$ теңдеуінің $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$аралығындағы шешімін табыңыз

$$sinx = \frac{1}{2}$$
$$x = (-1)^n arcsin\frac{1}{2} + \pi n$$
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$$

Жауабы: $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ аралығындағы берілген теңдеудің шешімі $\frac{\pi}{6}$-ға тең.

$\frac{\pi}{6}$ теңдеудің негізгі шешімі.

2. Жалпы шешім: тригонометриялық теңдеудің барлық мүмкін шешімдерінен тұратын шешім жалпы шешім деп аталады. Мысалы,

$tgx = -\sqrt{3}$ теңдеуінің шешімін табыңыз.

$$tgx = -\sqrt{3}$$
$$x = -arctg\sqrt{3} + \pi k$$
$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$$

Жауабы: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$

$-\frac{\pi}{3} + \pi k$ теңдеудің жалпы шешімі.

Тригонометриялық теңдеулерді шешудің әртүрлі әдістері

Тригонометриялық теңдеуді шешу екі кезеңнен тұрады: қарапайым форманы алу үшін теңдеуді түрлендіру және алынған қарапайым тригонометриялық теңдеуді шешу. Тригонометриялық теңдеулерді шешудің он негізгі әдісі бар.

1) Формула арқылы қарапайым түрге келтірілетін тригонометриялық теңдеулер

2) Рационал қарапайым тригонометриялық теңдеулер

3) Жаңа айнымалы енгізу тәсілімен шығатын тригонометриялық теңдеулер

4) Көбейткіштерге жіктеу тәсілімен шығатын тригонометриялық теңдеулер

5) Дәрежені төмендету арқылы шығатын тригонометриялық теңдеулер

6) Біртектес тригонометриялық теңдеулер

7) Қосындыны көбейті түріне келтіру арқылы шығатын тригонометриялық теңдеулер

8) Қосымша бұрыш енгізу арқылы шығатын тригонометриялық теңдеулер

9) $tg\frac{\varphi}{2} = t$ жаңа айнымалысын енгізу тәсілі арқылы шығатын тригонометриялық теңдеулер

10) Әр түрлі тәсілдермен шығатын тригонометриялық теңдеулер

Зерттеу нәтижелері мен талқылау

Тригонометриялық теңдеулерді шешудің әртүрлі әдістерін атап өттік. Енді әр әдіске есептер қарастырып өтер болсақ:

1. Формула арқылы қарапайым түрге келтірілетін тригонометриялық теңдеулер (Шыныбеков, 2019: 72) [7].

Есеп 1. $\frac{4tg3x}{2-2tg^2 3x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Бөлшектің бөлімінен ортақ мүшені жақша сыртына шығарамыз

$$\frac{4tg3x}{2(1 - tg^2 3x)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Теңдеудің сол жағын $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ өрнегіне келтіреміз

$$\frac{2tg3x}{1 - tg^2 3x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Қарапайым тригонометриялық теңдеуді шығарамыз

$$tg6x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$6x = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n$$
$$6x = \frac{\pi}{6} + \pi n$$
$$x = \frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6}, n \in Z$$

Жауабы: $x = \frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6}, n \in Z.$

2. Рационал қарапайым тригонометриялық теңдеулер

Есеп 2. $\frac{cosx}{\sqrt{2}sinx-1} = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Алдымен бөлшектің алымын шығарып аламыз

$$cosx = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$$

Бөлшектің бөлімі нөлге тең бола алмайтындықтан, тең емес нөлге деп шығарамыз

$$\sqrt{2}sinx - 1 \neq 0$$
$$\sqrt{2}sinx \neq 1$$
$$sinx \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x \neq (-1)^n arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n, n\epsilon Z$$
$$x \neq (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$$

Жауабы: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$.

3. Жаңа айнымалы енгізу тәсілімен шығатын тригонометриялық теңдеулер

Есеп 3. $2sinx - cos^2x - 2 = 0$ теңдеуін шешейік. (Пак, 2019: 145) [8].

Шешуі. $cos^2x + sin^2x = 1$ өрнегінен cos^2x мәнін тауып аламыз

$$2sinx - (1 - sin^2x) - 2 = 0$$
$$2sinx + sin^2x - 3 = 0$$

Жаңа айнымалы енгіземіз: $sinx = a$

$$a^2 + 2a - 3 = 0$$

Квадраттық теңдеуді шешеміз

$$D = 4 - 4 \cdot (-3) = 16$$
$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$
$$a_1 = 1,\ a_2 = -3$$

Квадраттық теңдеудің мәнін $sinx = a$ орнына қойып теңдеудің мәнін табамыз

$$sinx = 1$$
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$$
$$sinx = -3$$
$$\emptyset$$

Жауабы: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$.

4. Көбейткіштерге жіктеу тәсілімен шығатын тригонометриялық теңдеулер

Есеп 4. $(sinx - 1)tgx - 3sinx + 3 = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. 3 санын ортақ көбейткіш ретінде жақша сыртына шығарамыз

$$(sinx - 1)tgx - 3(sinx - 1) = 0$$

Сосын $\sin x - 1$ өрнегін ортақ көбейткіш ретінде жақша сыртына шығарамыз

$$(sinx - 1)(tgx - 3) = 0$$

Әр өрнекті жеке -жеке нөлге теңестіріп шығарамыз

$$sinx - 1 = 0$$
$$sinx = 1$$
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$$
$$tgx - 3 = 0$$
$$tgx = 3$$
$$x = arctg3 + \pi n, n\epsilon Z$$

Жауабы: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$; $x = arctg3 + \pi n, n\epsilon Z$.

5. Дәрежені төмендету арқылы шығатын тригонометриялық теңдеулер

Есеп 5. $2sin^2x = \frac{3}{2}$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Теңдеудің екі жағында екіге бөліп жібереміз

$$sin^2x = \frac{3}{4}$$

sin^2x өрнегін $sin^2\alpha = \frac{1-cos2\alpha}{2}$ өрнегіне теңестіріп аламыз

$$\frac{1 - cos2x}{2} = \frac{3}{4}$$

Ұқсас мүшелерді біріктіріп, қарапайым тригонометриялық теңдеудің мәнін табамыз

$$1 - cos2x = \frac{3}{2}$$
$$-cos2x = \frac{3}{2} - 1$$
$$cos2x = -\frac{1}{2}$$
$$2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$$
$$2x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi n$$

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$
$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n\epsilon Z$$

Жауабы: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n\epsilon Z.$

6. Біртектес тригонометриялық теңдеулер

Есеп 6. $sin^2x - 2sin2x + 3cos^2x = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$ мәнін орнына қойып, теңдеудің екі жағында cos^2x-ке бөлеміз

$$sin^2x - 4sinxcosx + 3cos^2x = 0| \div cos^2x$$
$$\frac{sin^2x}{cos^2x} - \frac{4sinxcosx}{cos^2x} + \frac{3cos^2x}{cos^2x} = 0$$

Сонда берілген теңдеуге мәндес $tg^2x - 4tgx + 3 = 0$ теңдеуін аламыз. tgx-ті a арқылы өрнектесек, $a^2 - 4a + 3 = 0$ алгебралық теңдеуі шығады

$$D = 16 - 4 \cdot 3 = 4$$
$$a = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

Соңғы теңдеудің шешімі $a_1 = 3,\ a_2 = 1$ сандары болады. $tgx =$ a алмастыруын қолданып, x-тің мәндерін табамыз:

$$tgx = 3$$
$$x = arctg3 + \pi n, n\epsilon Z$$
$$tgx = 1$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$$

Жауабы: $x = arctg3 + \pi n, n\epsilon Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z.$

7. Қосындыны көбейтінді немесе көбейтіндіні қосынды түріне келтіру арқылы шығатын тригонометриялық теңдеулер (Шарыгин 1995,93) [9].

Есеп 7. $cosx + sin2x - cos3x = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ формуласын қолданып түрлендіреміз

$$(cosx - cos3x) + sin2x = 0$$
$$2sin2xsinx + sin2x = 0$$

Ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарған соң, көбейтткіштерді нөлге теңестіріп теңдеуді шешеміз

$$sin2x(2sinx + 1) = 0$$
$$sin2x = 0$$
$$2x = \pi n, n\epsilon Z$$
$$x = \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z$$
$$2sinx + 1 = 0$$
$$sinx = -\frac{1}{2}$$
$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n\epsilon Z$$

Жауабы: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n\epsilon Z.$

8. Қосымша бұрыш енгізу арқылы шығатын тригонометриялық теңдеулер

Есеп 8. $\sqrt{2}sin2x + \sqrt{2}cos2x = \sqrt{2}$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ формуласын қолдана отырып, берілген теңдеуді екіге бөлу керектігін анықтаймыз.

$$\sqrt{2}sin2x + \sqrt{2}cos2x = \sqrt{2}| \div 2$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}sin2x + \frac{\sqrt{2}}{2}cos2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Сонда пайда болған теңдеуді $\sin(\alpha + \beta) = sin\alpha sin\beta + cos\alpha cos\beta$ формуласы арқылы өрнектейміз және қарапайым тригонометриялық теңдеудің мәнін табамыз

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$$
$$2x = (-1)^n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$$
$$x = (-1)^n\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z$$

Жауабы: $x = (-1)^n\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z.$

9. $tg\frac{\varphi}{2} = t$ *жаңа айнымалысын енгізу тәсілі арқылы шығатын тригонометриялық теңдеулер*

Есеп 9. $3sinx + 4cosx = 3$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Қос бұрыштар формуласы арқылы $sin\alpha = 2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}$; $cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}$ және $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ формуласы арқылы өрнектейміз:

$$6sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} + 4cos^2\frac{x}{2} -$$
$$-4sin^2\frac{x}{2} = 3cos^2\frac{x}{2} + 3sin^2\frac{x}{2}$$

$6sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2} - 7sin^2\frac{x}{2} = 0$ теңдеуін $-cos^2\frac{x}{2}$-ке бөліп жібереміз. Сонда

$7tg^2\frac{x}{2} - 6tg\frac{x}{2} - 1 = 0$ түріндегі теңдеу шығады. $tg\frac{x}{2}$-ті t арқылы өрнектейміз:

$$7t^2 - 6t - 1 = 0$$
$$D = 36 - 4 \cdot 7 \cdot (-1) = 64$$
$$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 7}$$

Соңғы теңдеудің шешімдері $t_1 = 1$; $t_2 = -\frac{1}{7}$ болады. $tg\frac{x}{2} = t$ алмастыруын қолданып теңдеудің шешімдерін табамыз

$$tg\frac{x}{2} = 1$$
$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$$
$$tg\frac{x}{2} = -\frac{1}{7}$$
$$\frac{x}{2} = -arctg\frac{1}{7} + \pi n, n\epsilon Z$$
$$x = -2arctg\frac{1}{7} + 2\pi n, n\epsilon Z$$

Жауабы: $x = -2arctg\frac{1}{7} + 2\pi n, n\epsilon Z$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$

10. Әр түрлі тәсілдермен шығатын тригонометриялық теңдеулер (Гусев 2013, 197) [10]

Есеп 10. $-5cos4x = 2cos^2x + 1$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Қос бұрыштар формуласы арқылы $cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$ және дәрежені төмендету формуласы арқылы $cos^2\alpha = \frac{1+cos2\alpha}{2}$ өрнектейміз. Сонда

$$-5(2cos^2 2x - 1) = 2\left(\frac{1 + cos2x}{2}\right) + 1$$

теңдеуі шығады. Жақшаны ашып, ұқсас мүшелерді біріктіреміз:

$$-10cos^2 2x + 5 = 2 + cos2x$$

Теңдеудің оң жақ бөлігіндегі мүшені сол жақ бөлігіне көшіреміз және ұқсас мүшелерді біріктіреміз:

$$10cos^2 2x + cos2x - 3 = 0$$

$cos2x$-ті t арқылы өрнектейміз:

$$10t^2 + t - 3 = 0$$
$$D = 1 - 4 \cdot 10 \cdot (-3) = 121$$
$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 10}$$

Теңдеудің шешімдері $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = -\frac{3}{5}$ болады. $cos2x = t$ алмастыруын қолданып теңдеудің шешімдерін табамыз:

$$cos2x = \frac{1}{2}$$
$$2x = arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$$
$$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$
$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$cos2x = -\frac{3}{5}$$
$$2x = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi n$$
$$2x = (\pi - \arccos\frac{3}{5}) + 2\pi n$$
$$x = \frac{1}{2}(\pi - \arccos\frac{3}{5}) + \pi n$$

Жауабы: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$; $x = \frac{1}{2}(\pi - \arccos\frac{3}{5}) + \pi n$

Қорытынды

Сонымен, қорытындылай келе тригонометриялық теңдеулерді шешудің бірнеше әдісін анықтадық және осы теңдеулердің шешімін табу үшін оқушыларға жан-жақты жүйелі білім және тапқырлық элементтері қажет. Мұндай тригонометриялық теңдеулерді шеше білу оқушылардың математикалық логикалық ойлау қабілетін қалыптастыруына өз ықпалын тигізеді. Математиканы оқып-үйрену есеп шығаруды білу үшін ғана емес, адам өміріндегі алдымыздан шығатын кез келген мәселелерді дұрыс шеше білуге және өз қабілетімізді жан-жақты жетілдіру үшін қажет.

Біздің ендігі жоспарымызда «Тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктер» тақырыбы бойынша есептер жинағын құрастырып шығару бар.

Әдебиеттер

1. Алпысов А.Қ. Математиканы оқыту әдістемесі: Оқу құралы. – Павлодар, 2012. – 151 б.

2. Шарыгин И. Ф. Математика для поступающих в вузы: Учебное пособие. – М. : Дрофа, 2006. – С. 148.

3. Кравцев С. В. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. – М.: Экзамен, 2001. – С. 54.

4. Мордкович А.Г., Глизбург В.И., Лаврентьева Н.Ю. Математика: Полный справочник. – Москва: АСТ: Астрель, 2016. – С. 151-154.

5. Мордкович А. Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе //Математика в школе. – 2002. – №. 6. – С. 32-38.

6. Әбілқасымова А.Е., Корчевский В.Е., Жұмағұлова З.Ә. Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану -математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық (1-бөлім). – Алматы: Мектеп, 2019 – 240 б.

7. Шыныбеков А., Шыныбеков Д., Жумабаев Р. Алгебра және анализ бастамалары. – Алматы: Атамұра, 2019. – 272б.

8. Пак О., Ескендирова Е., Ардакулы Д., Курман Б. Алгебра және анализ бастамалары. 1 бөлім. -Алматы: Алматыкітап, 2019. – 240б.

9. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. Решение задач: Учеб пособие для 11 кл. общеобразовательное учреждений. – М.: Просвещение, 1995. – С. 134.

10. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика. 5-11 классы. Справочник школьника. – Астрель 2013. – С. 219-288.

References

Abylkasymova A. E., Korchevsky V. E., Zhumagulova Z. A. (2019) .Algebra jäne taldaw bastamaları: Jalpı bilim beretin mekteptiñ jaratılıstanw-matematïkalıq bağıttağı 10-sınıbına arnalğan oqwlıq (1-bölim) [Algebra and the beginning of analysis: textbook for the 10th grade of a comprehensive school of natural-mathematical direction (Part 1)] Almaty, School.(In Kazakh)

Alpysov A. K. (2012). Matematıkany oqytý ádistemesi: oqw quralı [Methods of teaching mathematics: a textbook] Pavlodar. (In Kazakh)

Gusev V.A., Mordkovich A.G. (2013).Matematika. 5-11 klassy. Spravochnik shkol'nika [Mathematics. Grades 5-11. The schoolboy's handbook]. Astrel. (In Russian)

Kravtsev S. V. (2001).Metody resheniya zadach po algebre: ot prostykh do samykh slozhnykh [Methods of solving problems in algebra: from the simplest to the most complex] Moscow, Exam. (In Russian)

Mordkovich A. G. (2002). Metodicheskiye problemy izucheniya trigonometrii v obshcheobrazovatel'noy shkole [Methodological problems of studying trigonometry in secondary school] – (In Russian) . Math at school, no 6, pp.32-38 (In Russian)

Mordkovich A.G., Glizburg V.I., Lavrentieva N.Yu.(2016).Matematika: Polnyy spravochnik [Mathematics: A complete reference]. Moscow, Astrel, 151 -154 p. (In Russian)

Pak O., Eskendirova E., Ardakuly D., Kurman B. (2019) .Algebra jäne taldaw bastamaları [Algebra and the beginning of analysis. Part 1.]. Almaty, Almatykitap.(In Kazakh)

Sharygin I. F. (2006). Matematika dlya postupayushchikh v vuzy: Uchebnoye posobiye [Mathematics for university applicants: Textbook] . Moscow, Bustard. (In Russian)

Sharygin I. F., Golubev V. I. (1995). Resheniye zadach: Ucheb posobiye dlya 11 kl. obshcheobrazovattel'noye uchrezhdeniy [Problem solving: A textbook for the 11th grade of general education institutions]. Moscow, Enlightenment. (In Russian)

Shynybekov A., Shynybekov D., Zhumabaev R. (2019). Algebra jäne taldaw bastamaları [Algebra and the beginning of analysis] . Almaty, Atamura. (In Kazakh)